Chapitre 9 – Les puissances

Compétences à valider :

- Comprendre et utiliser les puissances de 10 (10^n ; 10^{-n})
- Utiliser les règles de calcul sur les puissances.
- Ecrire un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances.
- Utiliser la notation scientifique.

I. Les puissances d'exposants positifs

Définition : Soit a un **nombre relatif** quelconque et n un **nombre entier** avec $n \geq 2$.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a \times a}_{n \text{ fois}}$$

- a^n se lit a puissance n
- $a \times a$ s'écrit a^2 et se lit a au carré
- $a \times a \times a$ s'écrit a^3 et se lit a au cube

ex 1, 2

Exemples :

3 à la puissance 4	0 à la puissance 5	1 à la puissance 5	9 à la puissance 1	-3 à la puissance 4
3^4	0^5	1^5	9^1	$(-3)^4$
$3 \times 3 \times 3 \times 3$	$0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0$	$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$	9	$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
81	0	1	9	81

Cas particuliers :

- $a^1 = a$ pour tout nombre a.

  $2^1 = 2$ $3^1 = 3$ ...
- $a^0 = 1$ pour tout nombre a non nul.

  $2^0 = 1$ $3^0 = 1$ ...
- $0^n = 0$ pour tout nombre entier n non nul.

  $0^1 = 0$ $0^2 = 0 \times 0 = 0$
- $1^n = 1$ pour tout nombre entier n.

  $1^2 = 1 \times 1 = 1$ $1^3 = 1$ ...

ex 3

Attention aux signes ! Ne pas confondre ex 4

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$ et : $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$

La puissance 4 est dehors des parenthèses c'est donc 4 fois le facteur (-3)

Le moins s'applique sur le 3 à la puissance 4 donc c'est comme si le moins est à l'extérieur

Exemples : Calculer.

$A = (-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$ $B = -1^2 = -(1 \times 1) = -1$ $C = (-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$D = -3^3 = -(3 \times 3 \times 3) = -27$ $E = (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$ $F = -7^2 = -(7 \times 7) = -49$

$G = (-9)^0 = 1$ $H = -9^0 = -(9^0) = -1$

II. Les puissances d'exposants négatifs

Définition : Soit a un nombre relatif non nul et n un nombre entier.

a^{-n} désigne **l'inverse** de a^n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

l'exposant devient +

Exemples : Calculer :

$A = 2^{-3}$ $B = 3^{-2}$ $C = 5^{-10}$

$A = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$ $B = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$ $C = \frac{1}{5^{10}} = \frac{1}{9765625}$

Cas particulier :

Pour $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$ $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$ donc 3^{-1} est l'inverse de 3

Exemples : Calculer 2^{-1}, 8^{-1} et 10^{-1}

$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $8^{-1} = \frac{1}{8^1} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

III. Les puissances de 10

Définition : Soit n un **nombre entier supérieur ou égal à 1** ($n \geq 1$).

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10 \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}$$

- 10^n se lit 10 à la puissance n
- 10×10 s'écrit 10^2 et se lit 10 au carré
- $10 \times 10 \times 10$ s'écrit 10^3 et se lit 10 au cube

Par convention, $10^1 = 10$ et $10^0 = 1$

Exemples :

$10^{3} = 10 \times 10 \times 10 = \overbrace{1000}^{3 \text{ zéros}}$ $\quad$ $10^{6} = 1\,\overbrace{000\,000}^{6 \text{ zéros}}$ $\quad$ $10^{9} = 1\,\overbrace{000\,000\,000}^{9 \text{ zéros}}$

Propriété : Soit n un **nombre entier supérieur ou égal à 1** ($n \geq 1$).

$$10^{-n} = \frac{1}{10^{n}} = \underbrace{0{,}0 \dots 0}_{avec\ n\ zéros}1$$

on compte le zéro avant la virgule

Exemples : $10^{-6} = \frac{1}{10^{6}} = \overbrace{0{,}00000}^{6 \text{ zéros}}1$ $\quad$ $10^{-3} = \frac{1}{10^{3}} = \overbrace{0{,}00}^{3 \text{ zéros}}1$

Vocabulaire : On utilise des **préfixes** pour simplifier l'écriture des mesures exprimées en puissances de dix.

Préfixe	Notation	Puissance de 10	Exemple
exa	E	10^{18} trillion	
peta	P	10^{15} billiard	
téra	T	10^{12} billion	distance Terre-Soleil 0,15 Tm
giga	G	10^{9} milliard	diamètre du soleil 1,4 Gm
mega	M	$10^{6} = 1\,000\,000$ million	rayon de la Terre 6,4 Mm
kilo	k	$10^{3} = 1\,000$ mille	hauteur du Mont Blanc 4,8 km
hecto	h	$10^{2} = 100$ centaine	hauteur de la Tour Eiffel 3,24 hm
déca	da	$10^{1} = 10$ dizaine	
unité		$10^{0} = 1$	hauteur d'un homme 1,75 m
déci	d	$10^{-1} = 0{,}1$ dixième	
centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$ centième	taille d'un cube de sucre 1,8 cm x 2,8
milli	m	$10^{-3} = 0{,}001$ millième	longueur d'une fourmi 1 à 3 mm
micro	µ	$10^{-6} = 0{,}000\,001$	taille d'une cellule 20µm à 100 µm
nano	n	10^{-9}	taille des molécules d'ADN 1 nm
pico	p	10^{-12}	taille des atomes 100 pm
femto	f	10^{-15}	taille du noyau des atomes 1 fm
atto	a	10^{-18}	taille des quarks 1 am

A apprendre par

Exemples :

De combien d'octets correspond une clé USB de capacité 2Go ?

2 Go = 2×10^{9} = 2 000 000 000

La clé a une capacité de stockage de 2 milliards d'octets.

IV. La notation scientifique et les très grands et très petits nombres

Définition : La notation scientifique

La notation scientifique d'un nombre décimal différent de 0 est la seule écriture de la forme

$$a \times 10^n$$

$1 \leq a < 10$

a est compris entre 1 et 10 (exclu)

si "n" est positif c'est un grand nb

si "n" est négatif c'est un petit nb

Exemple : 732 800 s'écrit $7{,}328 \times 10^5$ en notation scientifique.

Exercice : Donner la notation scientifique des nombres suivants A = 8 300 000 ; B = 0,000 456 ;

6 zéros

$A = 8\,300\,000 = 8{,}3 \times 10^6$

$B = 0{,}000\,456 = 4{,}56 \times 10^{-4}$

4 zéros

Méthode de comparaison :

Pour comparer deux nombres le plus simple c'est la notation scientifique !

1) **On compare d'abord les puissances de 10.** Par exemple, entre 2×10^6 et 5×10^2, on voit facilement que $1\,000\,000 > 100$ donc $2 \times 10^6 > 5 \times 10^2$.
2) **Si les puissances sont les mêmes, on compare les facteurs placés devant.** Par exemple, entre $7{,}1 \times 10^3$ et $7{,}2 \times 10^3$, on voit que $7{,}1 < 7{,}2$ donc $7{,}1 \times 10^3 < 7{,}2 \times 10^3$

Exercice : Comparer les valeurs $72 \times 10^{\ 2}$ et $8 \times 10^{\ 3}$, ainsi que les valeurs -2×10^2 et -30×10^1.

$72 \times 10^2 = 7{,}2 \times 10^1 \times 10^2 = 7{,}2 \times 10^3$ $\quad 7{,}2 \times 10^3 < 8 \times 10^3$

$-30 \times 10^1 = -3 \times 10^1 \times 10^1 = -3 \times 10^2$ $\quad -3 < -2$ $\quad -2 \times 10^2 > -3 \times 10^{-2}$

Méthode d'encadrement :

Quand on a un nombre écrit avec la notation scientifique, il est simple d'**encadrer le nombre entre deux puissances de 10.**

$$10^5 < 7{,}5 \times 10^5 < 10^6$$

Exercice : Donner un encadrement des valeurs $8{,}2 \times 10^7$ et $-3{,}1 \times 10^2$.

$10^7 < 8{,}2 \times 10^7 < 10^8$

$10^2 < 3{,}1 \times 10^2 < 10^3$ donc $-10^2 > -3{,}1 \times 10^2 > -10^3$