Chapitre 5 – Carrés parfaits et triangles rectangles

Compétences à valider :

- **Connaître les carrés parfaits de 1 à 144**
- **Savoir encadrer la racine carrée d'un nombre positif entre deux entiers.**
- **Savoir donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.**
- **Connaître et appliquer le théorème de Pythagore et sa réciproque.**

I. Les carrés parfaits et les racines carrées

Rappel : Soit a un nombre quelconque.

$a \times a$ s'écrit a^2 et se lit « a au carré ».

ex 1

Exemples :

$5^2 = 5 \times 5 = 25$ $\quad$ $2^2 = 2 \times 2 = 4$ $\quad$ $10^2 = 10 \times 10 = 100$

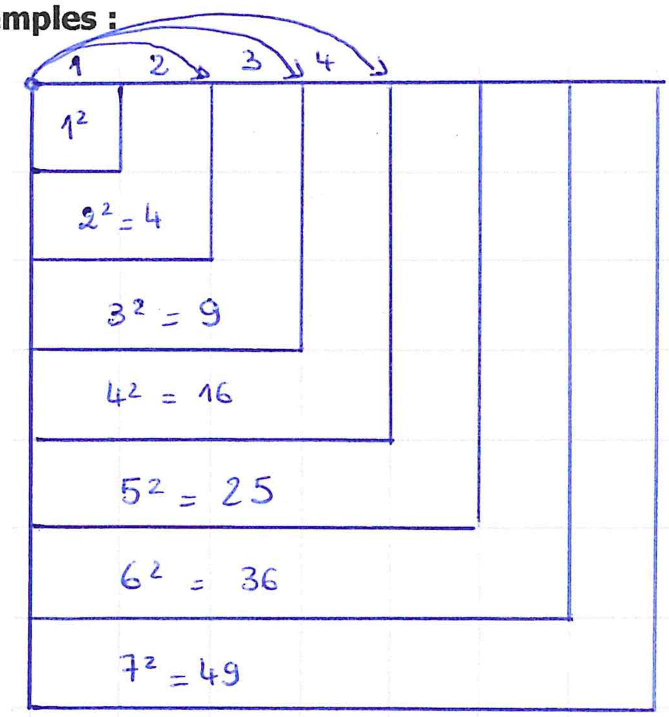
Définition : le carré parfait

On appelle **« le carré parfait de … »** le résultat d'un nombre **entier** au carré.

→ Chaque **carré parfait** est **l'aire d'un carré** dont la longueur des côtés est un nombre entier.

Il est donc possible de représenter un carré parfait par une forme géométrique carrée.

Exemples :



$8^2 = 64$

$9^2 = 81$

$10^2 = 100$

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$13^2 = 169$

Activité : Voici un tableau que l'on veut compléter.

x^2 →

5	7	3,1	6	8		
25	49	9,61	36	64	2	5,29

← ?

Pouvez-vous tout remplir ? Quelle opération permettrait de remonter dans le tableau ?

On ne sait pas trouver de tête les deux dernières valeurs
L'opération qui permet de remonter dans le tableau s'appelle la racine carrée

Définition : x désigne un nombre **positif.**

La racine carrée de x est le nombre dont le carré est égal à x.

Ce nombre se note $\sqrt{x}$ et se lit « racine carrée de x ».

ex 2,3

Exemple : $2^2 = 4$ donc $\sqrt{4} = 2$ $10^2 = 100$ donc $\sqrt{100} = 10$

Exercice : A l'aide de la calculatrice calculer les valeurs approchées des nombres suivants.

$\sqrt{2} \approx 1,41...$ $\sqrt{3} \approx 1,73...$ $\sqrt{5} \approx 2,24...$

Définition : Racines des carrés parfaits

Lorsque l'on fait la racine d'un **nombre entier** et que l'on obtient à nouveau un **nombre entier** on dit du premier nombre que c'est un carré parfait.

$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{81} = 9$ $\sqrt{100} = 10$ $\sqrt{121} = 11$ $\sqrt{144} = 12$

$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
40
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$

Méthode : Donner un encadrement d'une racine carrée

Pour encadrer une racine carrée entre deux entiers consécutifs, il faut repérer les racines de carrées parfaits **directement au-dessus et au-dessous** de la racine recherchée.

ex 4

Exemple : On cherche $\sqrt{20}$ On sait que $16 < 20 < 25$ Donc on aura $\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$ D'où $4 < \sqrt{20} < 5$	**A VOUS**	On cherche $\sqrt{40}$ On sait que $36 < 40 < 49$ Donc on aura $\sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49}$ D'où $6 < \sqrt{40} < 7$ ($\sqrt{40} \approx 6,32...$)

II. Le théorème de Pythagore et le calcul de longueur

Pythagore de Samos (570 av JC - 495 av JC) était un célèbre mathématicien et philosophe grec. Il n'a pas découvert son théorème qui était connu des chinois et babyloniens 1 000 ans avant lui, mais il aurait découvert sa formule générale. Il ne semble pas l'avoir prouvé.

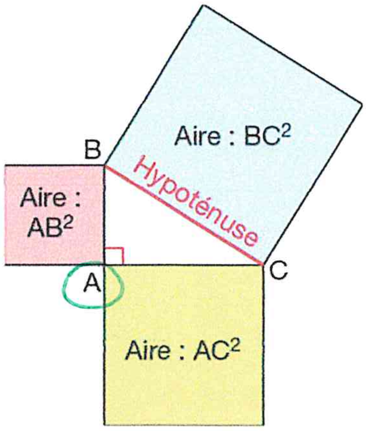
Il faut attendre **Euclide** vers le IIIème siècle avant JC pour la première démonstration connue…

Théorème de Pythagore :

Dans un **triangle rectangle**, la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

angle droit



Exemple : Soit ABC est un triangle rectangle en A.

Quelle égalité obtient-on d'après le théorème de Pythagore ?

ex 14

Le triangle ABC est rectangle en A ← où on travaille

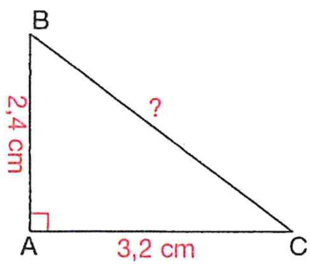
D'après le théorème de Pythagore, on a : ← d'après qui

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ ← égalité

➔ Le théorème de Pythagore permet de **calculer la longueur d'un côté** d'un triangle rectangle **si on a** la longueur des deux autres côtés.

ex 5, 6, 7

Exemples : 1) Soit le triangle ABC rectangle en A. Calculer la longueur de l'hypoténuse.



Le triangle ABC est rectangle en A ← où on travaille

D'après le théorème de Pythagore, on a : ← d'après qui

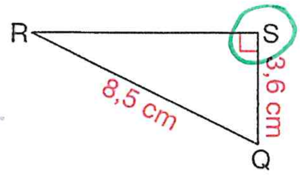
$BC^2 = BA^2 + AC^2$ ← égalité

donc $BC^2 = 2{,}4^2 + 3{,}2^2 = 5{,}76 + 10{,}24 = 16$

d'où $BC = \sqrt{BC^2} = \sqrt{16} = 4$

L'hypoténuse BC mesure 4 cm.

2) Soit le triangle RSQ rectangle en S. Calculer la longueur du côté RS.



Le triangle RSQ est rectangle en S. ← où

D'après le théorème de Pythagore, on a : ← qui

$RQ^2 = RS^2 + SQ^2$ ← égalité

donc $RS^2 = RQ^2 - SQ^2 = 8{,}5^2 - 3{,}6^2 = 59{,}29$

d'où $RS = \sqrt{RS^2} = \sqrt{59{,}29} = 7{,}7$

Le côté RS mesure 7,7 cm

Ex 8, 9, 10**

III. La réciproque du théorème de Pythagore et ses applications

Propriété : la réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, la somme des carrés des longueurs de deux petits côtés est égale au carré de la longueur du troisième côté, **alors ce triangle est** rectangle

➔ La **réciproque** de Pythagore permet de démontrer si un triangle est rectangle ou non

Exemples : 1) Soit un triangle ABC de côté AB=3cm, BC=4cm et AC=5cm. Le triangle ABC est-il rectangle ?

↳ côté le plus long

D'un côté, on a : $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

De l'autre, on a : $AC^2 = 5^2 = 25$ ← égalité

Dans le triangle ABC, ← où on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la **réciproque** du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B ← qui

2) Soit un triangle MON tel que MO = 4,8 cm, MN = 7,2 cm et ON = 5,5 cm. Est-ce-que ce triangle est rectangle ?

→ côté le plus long

D'un côté, on a : $MO^2 + ON^2 = 4{,}8^2 + 5{,}5^2 = 53{,}29$

De l'autre, on a : $MN^2 = 7{,}2^2 = 51{,}84$

Dans le triangle MON, on a $MO^2 + ON^2 \neq MN^2$ donc le triangle MON **n'** est **pas** rectangle

exc 11, 12, 13**

Bonus 15, 16