

Chapitre 5 – Carrés parfaits et triangles rectangles

Choses à savoir faire pour l'évaluation :

- Connaître les carrés parfaits de 1 à 144
- Savoir encadrer la racine carrée d'un nombre positif entre deux entiers.
- Savoir donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.
- Connaître et appliquer le théorème de Pythagore et sa réciproque.

I. Les carrés parfaits et les racines carrées

Rappel : Soit a un nombre quelconque.

$a \times a$ s'écrit a^2 et se lit « a au carré ».

ex 1

Exemples :

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

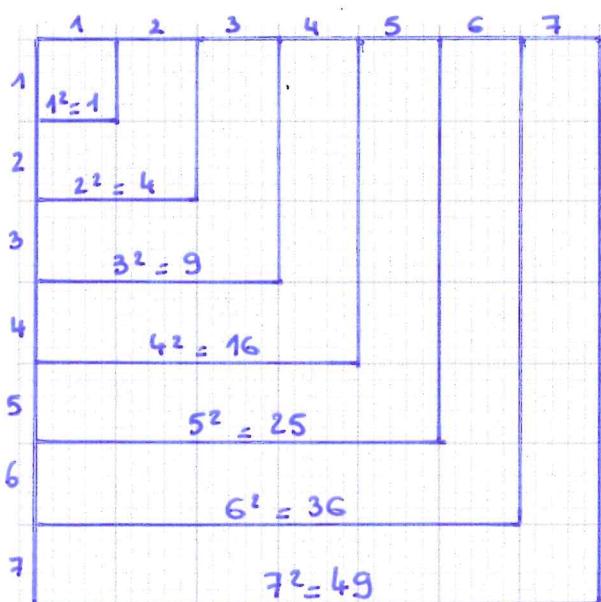
Définition : le carré parfait

On appelle « **le carré parfait de ...** » le résultat d'un nombre **entier** au carré.

→ Chaque **carré parfait** est l'**aire d'un carré** dont la longueur des côtés est un nombre entier.

Il est donc possible de représenter un carré parfait par une forme géométrique carrée.

Exemples :



$$8^2 = 64 \quad 9^2 = 81 \quad 10^2 = 100 \quad 11^2 = 121 \quad 12^2 = 144 \quad (\text{par } \heartsuit)$$

Activité : Voici un tableau que l'on veut compléter.

a^2	5	7	3,1	6	8	?	?	?
	25	49	9,61	36	64	2	5,29	

Pouvez-vous tout remplir ? Quelle opération permettrait de remonter dans le tableau ?

On ne peut pas remplir les deux dernières colonnes du tableau. L'opération qui permet de remonter dans le tableau

Définition : x désigne un nombre **positif**.

La racine carrée de x est le nombre dont le carré est égal à x .

Ce nombre se note \sqrt{x} et se lit « racine carrée de x ».

$$2^2 = 4 \text{ donc } \sqrt{4} = 2$$

$$10^2 = 100 \text{ donc } \sqrt{100} = 10$$

ex 2, 3

Exercice : A l'aide de la calculatrice calculer les valeurs approchées des nombres suivants.

$$\sqrt{2} \approx 1,41\dots$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73\dots$$

$$\sqrt{5} \approx 2,24\dots$$

Définition : Racines des carrés parfaits

Lorsque l'on fait la racine d'un **nombre entier** et que l'on obtient à nouveau un **nombre entier** on dit du premier nombre que c'est un carré parfait.

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{36} = 6 \quad \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{81} = 9 \quad \sqrt{100} = 10 \quad \sqrt{121} = 11 \quad \sqrt{144} = 12$$

Méthode : Donner un encadrement d'une racine carrée

Pour encadrer une racine carrée entre deux entiers consécutifs, il faut repérer les racines de carrés parfaits **directement au-dessus et au-dessous** de la racine recherchée.

ex 4 (2 colonnes)

20 →

Exemple : On cherche $\sqrt{20}$

On sait que $16 < 20 < 25$

Donc on aura $\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$

D'où $4 < \sqrt{20} < 5$

On cherche $\sqrt{40}$

On sait que $36 < 40 < 49$

Donc on aura $\sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49}$

D'où $6 < \sqrt{40} < 7$

A VOUS

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

$$5^2 = 25$$

$$6^2 = 36$$

$$7^2 = 49$$

$$8^2 = 64$$

$$9^2 = 81$$

$$10^2 = 100$$

40 >

49 >

64 >

81 >

100 >

121 >

144 >

169 >

196 >

225 >

256 >

289 >

324 >

361 >

400 >

441 >

484 >

529 >

576 >

625 >

676 >

729 >

784 >

841 >

900 >

961 >

1024 >

1089 >

1156 >

1225 >

1296 >

1369 >

1444 >

1521 >

1600 >

1681 >

1764 >

1849 >

1936 >

2025 >

2116 >

2209 >

2304 >

2401 >

2500 >

2601 >

2704 >

2809 >

2916 >

3025 >

3136 >

3249 >

3364 >

3481 >

3600 >

3721 >

3844 >

3969 >

4096 >

4225 >

4356 >

4489 >

4624 >

4761 >

4900 >

5041 >

5184 >

5329 >

5476 >

5625 >

5776 >

5929 >

6084 >

6225 >

6364 >

6501 >

6644 >

6781 >

6916 >

7056 >

7196 >

7336 >

7476 >

7616 >

7756 >

7896 >

8036 >

8176 >

8316 >

8456 >

8596 >

8736 >

8876 >

9016 >

9156 >

9296 >

9436 >

9576 >

9716 >

9856 >

9996 >

10136 >

10276 >

10416 >

10556 >

10696 >

10836 >

10976 >

11116 >

11256 >

11396 >

11536 >

11676 >

11816 >

11956 >

12096 >

12236 >

12376 >

12516 >

12656 >

12796 >

12936 >

13076 >

13216 >

13356 >

13496 >

13636 >

13776 >

13916 >

14056 >

14196 >

14336 >

14476 >

14616 >

14756 >

14896 >

15036 >

15176 >

15316 >

15456 >

15596 >

15736 >

15876 >

16016 >

16156 >

16296 >

16436 >

16576 >

16716 >

16856 >

16996 >

17136 >

17276 >

17416 >

17556 >

17696 >

17836 >

17976 >

18116 >

18256 >

18396 >

18536 >

18676 >

18816 >

18956 >

19096 >

19236 >

19376 >

19516 >

19656 >

19796 >

19936 >

20076 >

20216 >

20356 >

20496 >

20636 >

20776 >

20916 >

21056 >

21196 >

21336 >

21476 >

21616 >

21756 >

21896 >

22036 >

22176 >

22316 >

22456 >

22596 >

22736 >

22876 >

23016 >

23156 >

23296 >

23436 >

23576 >

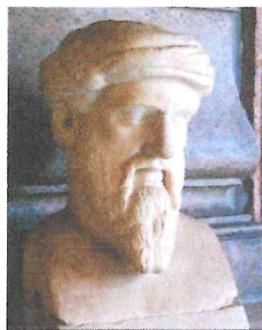
23716 >

23856 >

23996 >

24136 >

II. Le théorème de Pythagore et le calcul de longueur



Pythagore de Samos (570 av JC - 495 av JC) était un célèbre mathématicien et philosophe grec. Il n'a pas découvert son théorème qui était connu des chinois et babyloniens 1 000 ans avant lui, mais il aurait découvert sa formule générale. Il ne semble pas l'avoir prouvé.

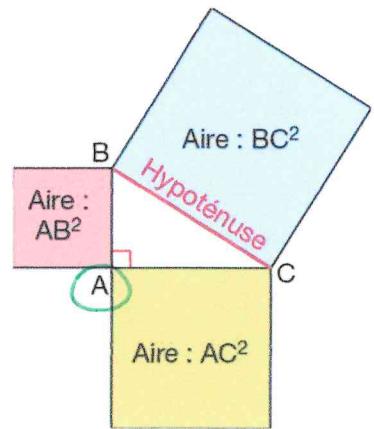
Il faut attendre **Euclide** vers le IIIème siècle avant JC pour la première démonstration connue...

Théorème de Pythagore :

Dans un **triangle rectangle**, la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

angle droit



Exemple : Soit ABC est un triangle rectangle en A.

Quelle égalité obtient-on d'après le théorème de Pythagore ?

ex 14

Le triangle ABC est rectangle en A ← où on travaille
 D'après le théorème de Pythagore, on a : ← d'après qui
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ← égalité

→ Le théorème de Pythagore permet de **calculer la longueur d'un côté** d'un triangle rectangle **si on a la longueur des deux autres côtés**.

ex 5,6,7

Exemples : 1) Soit le triangle ABC rectangle en A. Calculer la longueur de l'hypoténuse.

Le triangle ABC est rectangle en A ← où on travaille

D'après le théorème de Pythagore, on a :

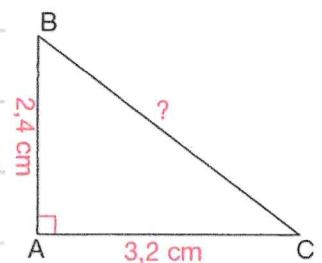
$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

← d'après qui

$$\text{donc } BC^2 = 2,4^2 + 3,2^2 = 5,76 + 10,24 = 16 \text{ ← égalité}$$

$$\text{d'où } BC = \sqrt{BC^2} = \sqrt{16} = 4$$

L'hypoténuse BC mesure 4 cm.



2) Soit le triangle RSQ rectangle en S. Calculer la longueur du côté RS.

Le triangle RSQ est rectangle en S. \leftarrow où

D'après le théorème de Pythagore, on a: \leftarrow qui

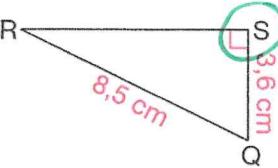
$$RQ^2 = RS^2 + SQ^2$$

\leftarrow égalité

$$\text{donc } RS^2 = RQ^2 - SQ^2 = 8,5^2 - 3,6^2 = 59,29$$

$$\text{d'où } RS = \sqrt{RS^2} = \sqrt{59,29} = 7,7$$

Le côté RS mesure 7,7 cm



Ex 8, 9, 10

III. La réciproque du théorème de Pythagore et ses applications

Propriété : la réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, la somme des carrés des longueurs de deux petits côtés est égale au carré de la longueur du troisième côté, alors ce triangle est rectangle

→ La **réciproque** de Pythagore permet de démontrer si un triangle est rectangle ou non

Exemples : 1) Soit un triangle ABC de côté AB=3cm, BC=4cm et AC=5cm. Le triangle ABC est-il rectangle ?

\hookrightarrow côté le plus long

$$\text{D'un côté, on a: } AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\text{De l'autre, on a: } AC^2 = 5^2 = 25$$

\leftarrow égalité

Dans le triangle ABC, \leftarrow où on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la **réciproque** du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B \leftarrow qui

2) Soit un triangle MON tel que MO = 4,8 cm, MN = 7,2 cm et ON = 5,5 cm. Est-ce-que ce triangle est rectangle ?

\hookrightarrow côté le plus long

$$\text{D'un côté, on a: } MO^2 + ON^2 = 4,8^2 + 5,5^2 = 53,29$$

$$\text{De l'autre, on a: } MN^2 = 7,2^2 = 51,84$$

\leftarrow inégalité

Dans le triangle MON, \leftarrow où on a $MO^2 + ON^2 \neq MN^2$ donc d'après le **théorème de Pythagore**, le triangle MON n'est pas rectangle

\leftarrow qui

\hookrightarrow conclusion

ex M, 12, 13**