Chapitre 4 : Inégalité triangulaire et droites remarquables dans le triangle

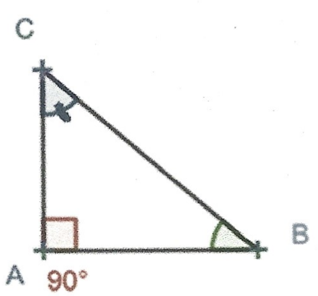
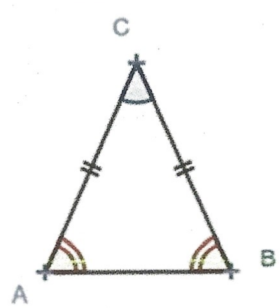
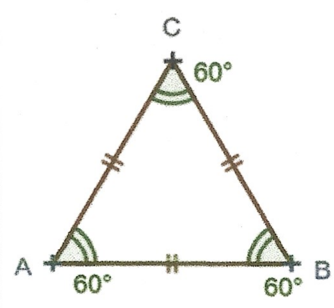
Compétences à valider :

- Utiliser les définitions et les propriétés relatives aux angles des triangles particuliers
- Construire un triangle en connaissant des longueurs et des angles.
- Utiliser l'inégalité triangulaire.
- Connaître les définitions d'une hauteur et d'une médiatrice dans un triangle.
- Savoir construire une médiatrice.
- Savoir construire une hauteur dans un triangle.

I. Les triangles particuliers

Vidéo-Méthode
Déterminer la nature d'un triangle
www.lienmini.fr/345-807

Il faut **connaitre par cœur ces rappels sur les propriétés** des côtés et des angles !

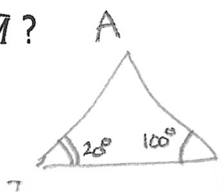
	Triangle **rectangle** en A	Triangle **isocèle** en C	Triangle **équilatéral**
Définitions	un triangle qui a un angle droit au sommet A	un triangle qui a 2 côtés égaux et 2 angles égaux	un triangle qui a ses trois côtés égaux et 3 angles égaux
Propriétés sur les angles	$\widehat{CAB} = 90°$	$\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$	$\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB} = 60°$
Exemples avec codage			

Propriété :

La somme des angles d'un triangle vaut 180°

Vidéo-Méthode
Calculer un angle dans un triangle
www.lienmini.fr/345-806

Exercice : Soit un triangle AMI ayant les angles $\widehat{AMI} = 100°$ et $\widehat{MIA} = 20°$. Combien vaut l'angle $\widehat{IAM}$?



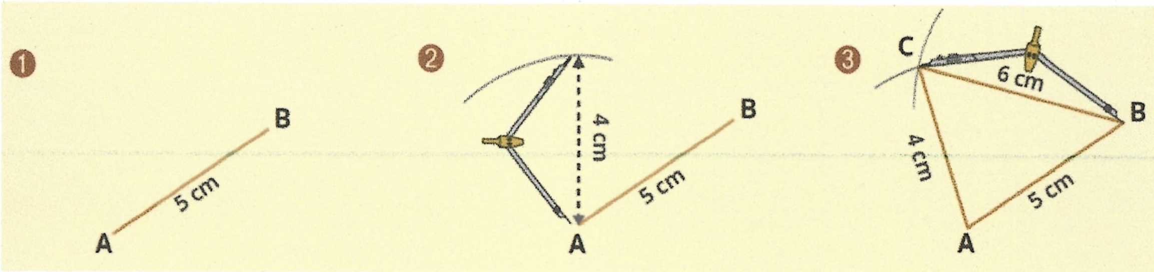
$\widehat{IAM} = 180 - \widehat{AMI} - \widehat{MIA} = 180 - 100 - 20 = 80 - 20 = 60$

L'angle $\widehat{IAM}$ vaut 60°

II. Construire un triangle

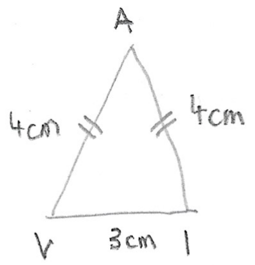
Vidéo-Méthode
PLAYLIST : Trois méthodes de construction de triangles
www.lienmini.fr/345-800

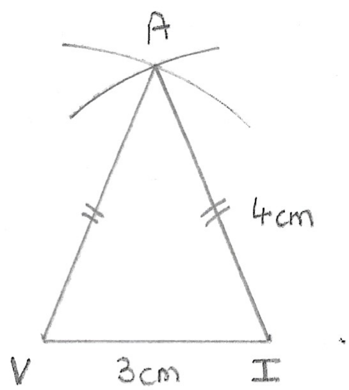
En connaissant les longueurs des trois côtés :



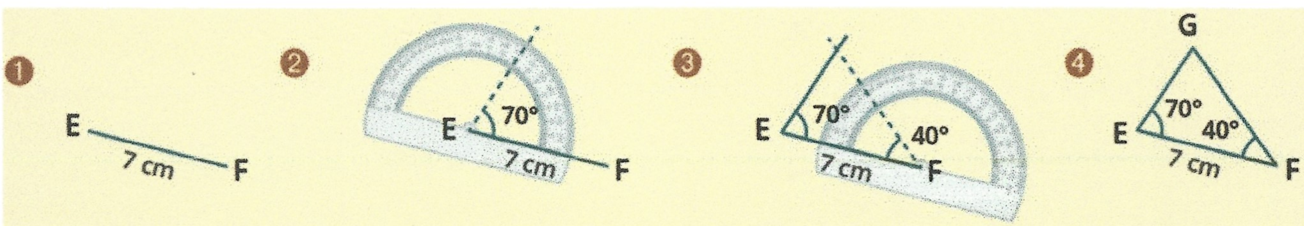
Après avoir tracé une figure à main levé, on trace un des côtés à la règle puis on utilise le compas pour trouver le dernier sommet.

Exemple : Tracer le triangle AVI, isocèle en A, tel que AV = 4cm et VI = 3 cm après avoir fait une figure à main levée



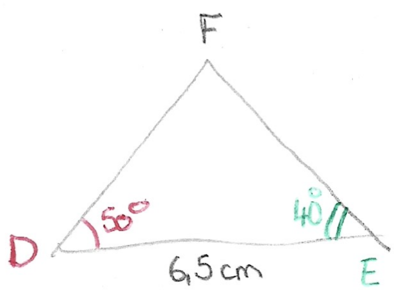


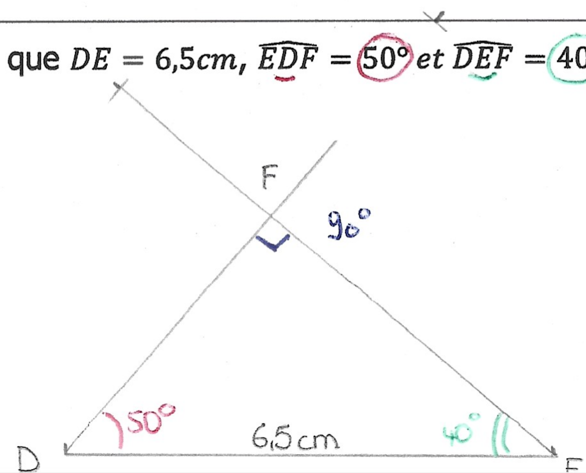
En connaissant un côté et deux angles :



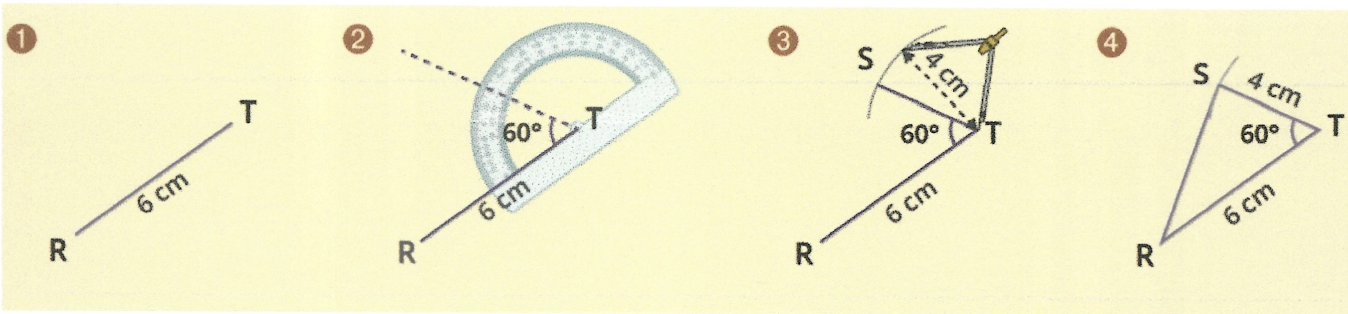
1. On commence par faire une figure à main levée avec toutes les informations fournies.
2. On trace le côté dont on connaît la longueur.
3. On trace les deux angles, en prolongeant si nécessaire, les côtés des angles de façon à obtenir le 3ème sommet.

Exemple : Tracer le triangle DEF tel que $DE = 6{,}5cm$, $\widehat{EDF} = 50°$ et $\widehat{DEF} = 40°$ après avoir fait une figure à main levée.



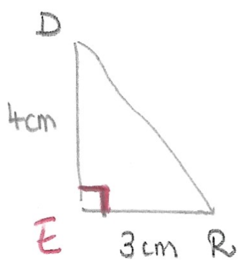


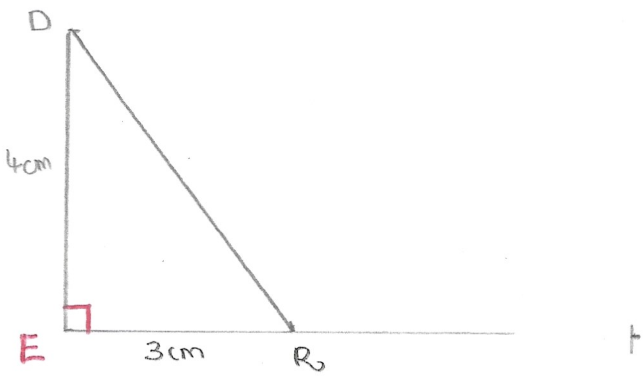
En connaissant deux côtés en un angle :



1. On commence par faire une figure à main levée avec toutes les informations fournies.
2. On trace un des côtés dont on connaît la longueur.
3. On construit l'angle.
4. On reporte la longueur du $2^{\text{ème}}$ côté sur le côté de l'angle que l'on vient de tracer pour obtenir le dernier sommet.

Exemple : Tracer le triangle RED rectangle en E tel que RE = 3cm et ED = 4cm après avoir fait une figure à main levée.



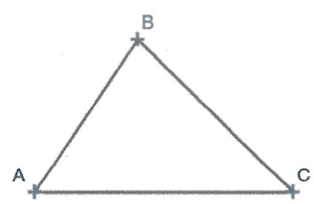


III. Existence d'un triangle : l'inégalité triangulaire

Propriété : l'inégalité triangulaire

Dans un triangle, **la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.**

$$AC < AB + BC$$



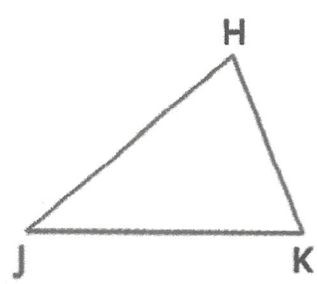
➡ Pour qu'un triangle soit **constructible**, il faut que la **longueur du plus grand côté** soit **inférieure à la somme des deux autres**.

Exemple : Ecrire les trois inégalités triangulaires dans le triangle HJK.

$HJ < HK + KJ$

$HK < KJ + JH$

$JK < HJ + JK$



Exemple : A l'aide de l'inégalité triangulaire, dire si on peut construire les triangles suivants :

Vidéo-Méthode
Appliquer l'inégalité triangulaire
www.lienmini.fr/345-804

1. le triangle ZAP de côté ZA = 2cm, ZP = 3cm et AP = 6cm.

Le côté le plus long c'est AP, donc on fait ZA+ZP = 2+3 = 5cm
On a AP > ZA+ZP
Le triangle ZAP n'est pas constructible.

2. le triangle OUI de côté OU = 2cm, UI = 3cm et OI = 5cm.

Le côté le plus long c'est OI, donc on fait OU+UI = 5cm
On a donc OI = OU+UI
Le triangle OUI est constructible mais il est plat

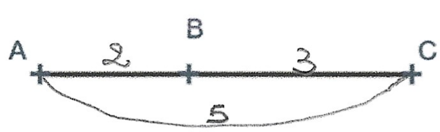
3. le triangle DEJ de côté DE = 2cm, EJ = 3cm et DJ = 4cm.

Le côté le plus long c'est DJ, donc on fait DE+EJ = 5cm
On a donc DJ < DE+EJ
Le triangle DEJ est constructible

Remarque

Si un des côtés du triangle **est égale** à la somme des deux autres côtés, on obtient un **triangle plat**.

$$AC = AB + BC$$



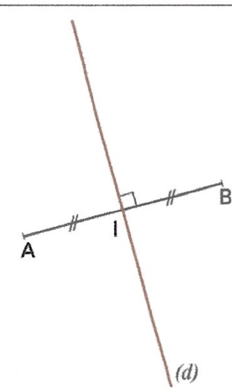
Attention le triangle plat est un triangle constructible !

IV. Médiatrices et hauteurs d'un triangle

Définition : la médiatrice

La **médiatrice** d'un segment est la droite **perpendiculaire** à ce segment et qui **passe par son milieu.**

Exemple : La droite *(d)* est la médiatrice du segment [AB]. Elle passe par le point I, milieu de [AB].

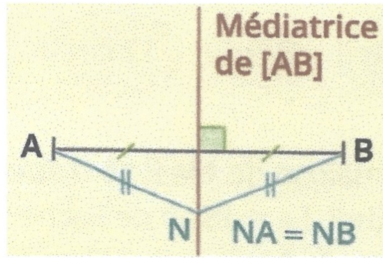


Propriété :

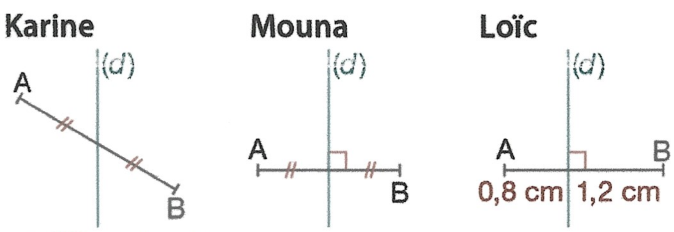
Tous les points **appartenant à la médiatrice** d'un segment sont à **égale distance des extrémités du segment.**
On dit qu'ils sont **équidistants** de A et de B.

Propriété : Appartenance à la médiatrice

Si un point N est un point tel que NA = NB, alors le point N **appartient à la médiatrice du segment [AB].**



Exercice : Sur quelle figure la médiatrice (d) du segment [AB] est-elle correctement tracée ?



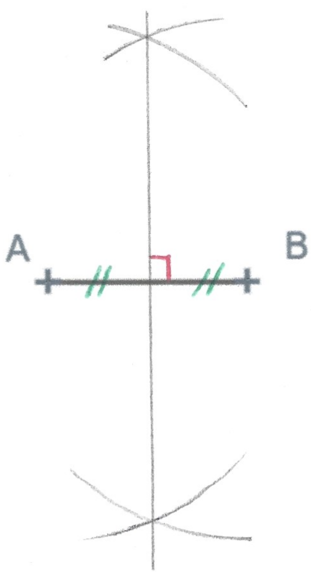
Mouna est la seule à avoir bien tracé sa médiatrice
Celle de Karine n'est pas perpendiculaire
Celle de Loïc ne passe pas par le milieu de [AB]

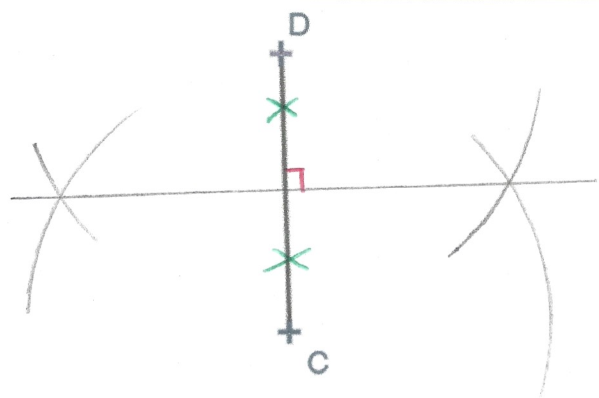
Méthode de construction de la médiatrice d'un segment :

1) Tracer un arc de cercle de centre A, le rayon étant plus grand que la moitié de AB.
2) Tracer un arc de cercle de centre B, **en gardant le même rayon.**
3) Les deux arcs de cercle se coupent en deux points : tracer la droite passant par ces deux points.
4) Penser à coder la perpendicularité et l'égalité de mesure des segments.

Exercice : Tracer les médiatrices des deux segments.

Vidéo-Méthode
Construire une médiatrice ou une hauteur
www.lienmini.fr/345-805

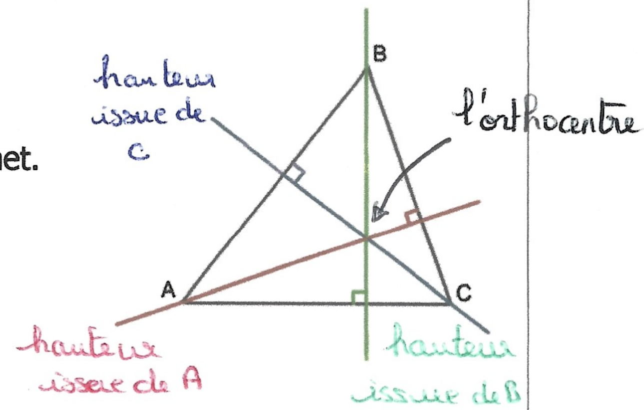




Définition : la hauteur

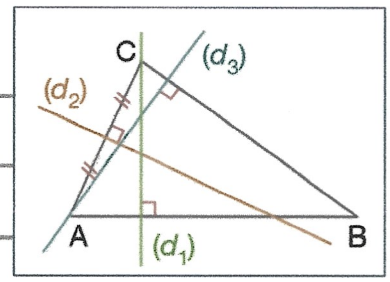
La **hauteur** d'un triangle est la droite **passant par un des sommets** et **perpendiculaire au côté opposé** à ce sommet.

➡ Un triangle a donc **trois hauteurs** qui ne sont **pas toujours à l'intérieur** des triangles.



Les trois hauteurs dans un triangle se coupent en un seul et même point. Ce point est appelé **orthocentre.**

Exercice : Parmi les droites $(d_1), (d_2) et (d_3)$ tracées sur la figure, lesquelles sont des hauteurs du triangle ABC ?



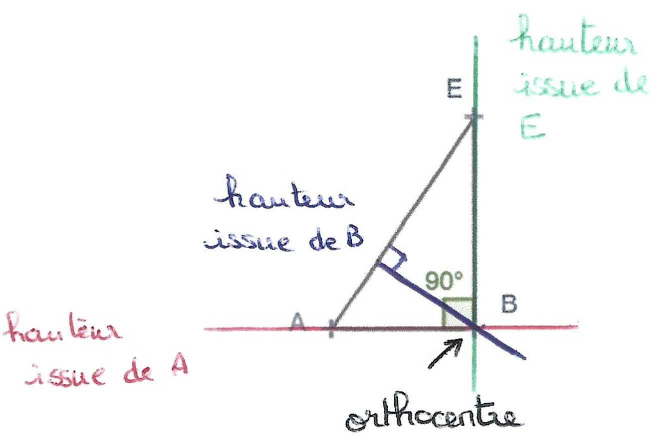
La droite (d_1) est bien la hauteur issue de C

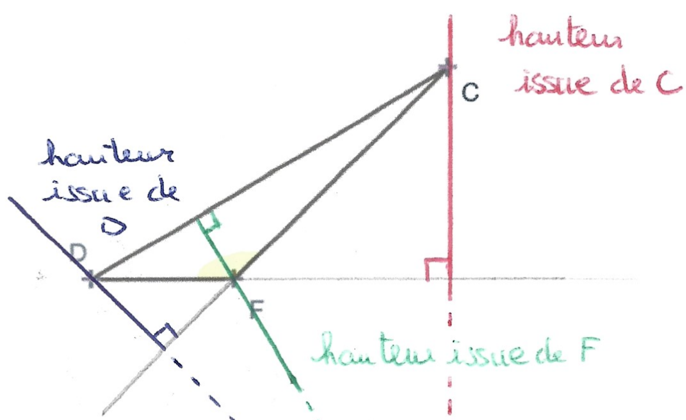
La droite (d_2) ne passe pas par le sommet B

La droite (d_3) est bien la hauteur issue de A

Cas particuliers :

Vidéo-Méthode
Construire une médiatrice ou une hauteur
www.lienmini.fr/345-805





Dans le triangle ABE rectangle en B, la hauteur issue de E est confondue avec le coté [EB] et la hauteur issue de A est confondue avec le côté [AB]

L'orthocentre se trouve sur l'angle droit, le somme B.

Dans le triangle DFC où l'angle $\widehat{DFC}$ est obtus, la hauteur issue de C et la hauteur issue de D sont à l'extérieur du triangle