Chapitre 4 – Les nombres rationnels

Compétences à valider :

- Connaître la notion de nombres premiers.
- Ecrire des fractions égales.
- Additionner/soustraire des écritures fractionnaires de nombres relatifs
- Multiplier et diviser des écritures fractionnaires de nombres relatifs.
- Connaître l'inverse d'une fraction.

I. Rappels : Reconnaitre un multiple, un diviseur et un nombre premier

Définition : Multiple et diviseur d'un nombre

Un nombre entier a est un multiple d'un nombre entier b non nul si le reste r de la division euclidienne de a par b est **égal à 0.**

On dira alors que b est un diviseurs de a ou que a est divisible par b.

Exemples :

Les diviseurs

Table de 2	Table de 3
2 x 1 = 2	3 x 1 = 3
2 x 2 = 4	3 x 2 = 6
2 x 3 = 6	3 x 3 = 9
2 x 4 = 8	3 x 4 = 12
2 x 5 = 10	3 x 5 = 15
2 x 6 = 12	3 x 6 = 18
2 x 7 = 14	3 x 7 = 21
2 x 8 = 16	3 x 8 = 24
2 x 9 = 18	3 x 9 = 27
2 x 10 = 20	3 x 10 = 30

Les multiples

Propriété : les critères de divisibilité

1, 2, 3

Un nombre entier est divisible :

- **Par 2** lorsqu'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8
- **Par 5** lorsqu'il se termine par 0 ou 5
- **Par 10** lorsqu'il se termine par 0
- **Par 4** lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4
- **Par 3** lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3
- **Par 9** lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9

Exemples : 540 est divisible par 2, 5 et 10 car il se termine par un 0

540 est divisible par 4 car 40 est divisible par 4.

5+4+0 = 9 donc 540 est divisible par 3 et par 9.

Définition :

4,5

Un **nombre premier** est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même

➔ On ne peut pas diviser un nombre premier par un autre entier que 1 et lui-même.

Ératosthène de Cyrène (IIIème siècle av. J.C.) est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec.
Son crible est une méthode qui permet de déterminer par exclusion tous les nombres premiers

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

les multiples de 2
les multiples de 3
les multiples de 5
les multiples de 7

par ♡

Il nous reste les nombres premiers de 1 à 100 qui sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Propriété : Décomposer en produit de facteurs premiers

Tout nombre **entier** supérieur ou égal à deux admet une décomposition unique en produit de facteurs premiers

➔ Tous les nombres entiers peuvent se décomposer en une unique suite de petites multiplications.

6, 7, 8

Exemples :

$68 = 1 \times 68$

$68 = 1 \times 2 \times 34$

$68 = \underbrace{1 \times 2 \times 2 \times 17}_{\text{que des nombres premiers}}$

$936 = 1 \times 3 \times 312$

$= 1 \times 3 \times 3 \times 104$

$= 1 \times 3 \times 3 \times 2 \times 52$

$= 1 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 26$

$936 = \underbrace{1 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13}_{\text{que des nombres}}$

II. Nombres rationnels, simplification et comparaison

Définition : Le nombre rationnel

Un nombre **rationnel** est un nombre que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a un nombre **entier relatif** et b un nombre **entier positif différent de 0**.

un entier relatif (+ ou −) → $\frac{a}{b}$ ← un entier positif ⊕ différent de 0

Exemples :

$\frac{1}{3} \simeq 0,333...$ $\qquad \frac{4}{1} = 4$ $\qquad -\frac{1}{7} \simeq 0,1428...$

Propriété : Obtenir des fractions équivalentes

Une fraction ne change pas si on **multiplie ou si on divise le numérateur et le diviseur par** un même nombre relatif différent de zéro

On obtient **alors une fraction équivalente.**

9, 10

Exemples :

$\frac{7}{8} = \frac{7 \times 2}{8 \times 2} = \frac{14}{16}$ $\quad \frac{7}{8}$ et $\frac{14}{16}$ sont des fractions équivalentes

$\frac{12}{15} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$ $\quad \frac{12}{15}$ et $\frac{4}{5}$ sont des fractions équivalentes

Règle de simplification :

Pour simplifier des fractions, on peut **décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.** Puis il suffit de simplifier les produits **en enlevant le même facteur au dénominateur et au numérateur.**

11, 12 (2 lignes)

Exemples : Simplifier la fraction $\frac{330}{260}$

$330 = 33 \times 10$
$\quad = 3 \times 11 \times 2 \times 5$

$260 = 26 \times 10$
$\quad = 2 \times 13 \times 2 \times 5$

$\frac{330}{260} = \frac{3 \times 11 \times \cancel{2} \times \cancel{5}}{2 \times 13 \times \cancel{2} \times \cancel{5}} = \frac{33}{26}$

On a simplifier la fraction par 10.

Règles de comparaison de deux fractions :

- Pour comparer deux quotients de dénominateurs différents, on les met d'abord sur le même dénominateur.
- Un nombre négatif est **plus** petit qu'un nombre positif.
- De deux nombres positifs, le **plus petit** est celui qui a la **plus** petite **distance à zéro.**
- De deux nombres négatifs, le **plus petit** est celui qui a la **plus** grande **distance à zéro.**

13, 14, 15
2 lignes

Exemples : On veut comparer $\frac{15}{20}$ et $\frac{12}{16}$, puis $\frac{4}{22}$ et $\frac{10}{13}$.

•) 22 et 13 n'ont pas de diviseurs communs, on fait donc $22 \times 13 = 286$

$\frac{4}{22} = \frac{4 \times 13}{22 \times 13} = \frac{52}{286}$ $\qquad \frac{10}{13} = \frac{10 \times 22}{13 \times 22} = \frac{220}{286}$ $\qquad$ donc $\frac{52}{286} < \frac{220}{286}$

•) 20 et 16 sont divisible par $\boxed{4}$, $20 = \boxed{4} \times 5$ et $16 = \boxed{4} \times 4$

$\frac{15}{20} = \frac{15 \times 4}{20 \times 4} = \frac{60}{80}$ $\qquad \frac{12}{16} = \frac{12 \times 5}{16 \times 5} = \frac{60}{80}$ $\qquad$ donc $\frac{15}{20} = \frac{12}{60}$

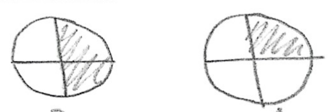
III. Additionner et soustraire des nombres rationnels

16, 17, 18

Règle d'addition et de soustraction :

- Pour additionner (ou pour soustraire) deux quotients de **même dénominateur**, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on conserve le dénominateur commun.
- Pour additionner (ou pour soustraire) deux quotients de **dénominateurs différents,** on les écrit avec le même dénominateur (on dit qu'on les réduit au même dénominateur).

Exemples :



$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{7}{8} + \frac{15}{8} = \frac{7+15}{8} = \frac{22}{8} = \frac{22 \div 2}{22 \div 2} = \frac{11}{4}$

$\frac{12}{3} - \frac{6}{3} = \frac{12-6}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$\frac{5}{15} + \frac{1}{2} = \frac{5 \times 2}{15 \times 2} + \frac{1 \times 15}{2 \times 15} = \frac{10}{30} + \frac{15}{30}$

$15 \times 2 = 30$ $\qquad = \frac{10+15}{30} = \frac{25}{30}$

$\frac{7}{8} - \frac{5}{16} = \frac{7 \times 2}{8 \times 2} - \frac{5}{16} = \frac{14}{16} - \frac{5}{16} = \frac{14-5}{16}$

$8 \times 2 = 16$ $\qquad = \frac{9}{16}$

IV. Multiplier et diviser des nombres rationnels

19, 20, 21**, 22

Règle de calcul : Multiplication de deux fractions

Pour multiplier deux quotients,

- on multiplie les **numérateurs entre eux**
- on multiplie les **dénominateurs entre eux.**

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{1 \times c}$$

$$\frac{a}{d} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{d} \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{d \times c}$$

Exemples : Attention aux signes

$$A = -\frac{5}{4{,}5} \times \frac{1}{2} = \frac{-5 \times 1}{4{,}5 \times 2} = \frac{-5}{9}$$

$$B = \frac{5}{8} \times \frac{2}{-3} = + \frac{5 \times 2}{8 \times 3} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

($\div 2$)

Définition : Inverse d'un nombre relatif :

L'**inverse** d'un nombre relatif a non nul est le nombre qui multiplié par a donne 1

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a \times 1}{1 \times a} = \frac{a}{a} = 1$$

23, 24

Exemple : $\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3 car $\frac{1}{3} \times 3 = 1$

Exercice : Donner l'inverse des nombres suivants :

2 est l'inverse de $\frac{1}{2}$ car $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$-\frac{1}{3}$ est l'inverse de -3 car $-\frac{1}{3} \times (-3) = -\frac{1}{3} \times \frac{-3}{1} = +\frac{3}{3} = 1$

Propriété : Diviser par un nombre relatif

Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b}$$

25, 26, 27, 28**

Exemple :

+ 29, 30

$$\frac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \times \frac{2}{1} = 8$$

Exercice : Calculer les quotients suivants :

$$\frac{\frac{-9}{7}}{\frac{-5}{7}} = + \frac{9}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{\frac{6}{11}}{\frac{-7}{5}} = -\frac{6}{11} \times \frac{5}{7} = -\frac{30}{77}$$