Chapitre 3 – Les nombres relatifs



C'est plus souvent au mathématicien indien **Brahmagupta** (598 ; 660) que l'on attribue la découverte des « nombres » négatifs. Sans justification, il donne des règles de calcul permettant d'expliquer des débits dans les comptes pour les besoins du commerce (vente, dettes, ...) : « *Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette.* » L'introduction des quantités négatives en occident est cependant difficile. Au XVII ème siècle encore, **Lazare Carnot** (ingénieur et mathématicien français) niait l'existence des nombres négatifs : *« Pour obtenir un nombre négatif, il faudrait ôter quelque chose à rien. »*

A savoir faire pour l'évaluation :

- Connaitre l'opposé d'un nombre.
- Additionner / soustraire deux nombres relatifs en écriture décimale.
- Multiplier /diviser des nombres relatifs
- Effectuer une succession d'opérations ; connaître les priorités opératoires.

I. Comparaison de nombres relatifs

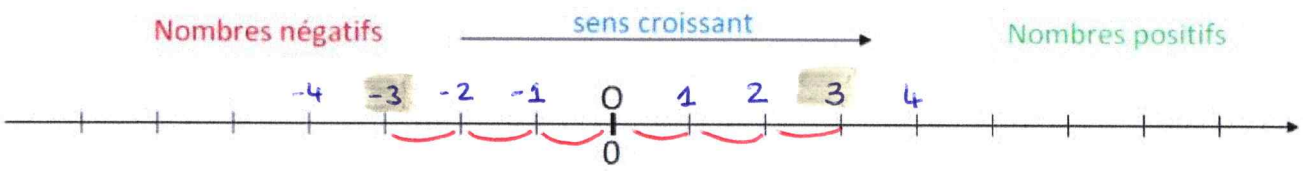
Définition : Les nombres relatifs

L'ensemble de tous les nombres positifs et tous les nombres négatifs s'appelle **l'ensemble des nombres** relatifs

Un nombre sans son signe s'appelle la distance à zéro de ce nombre.

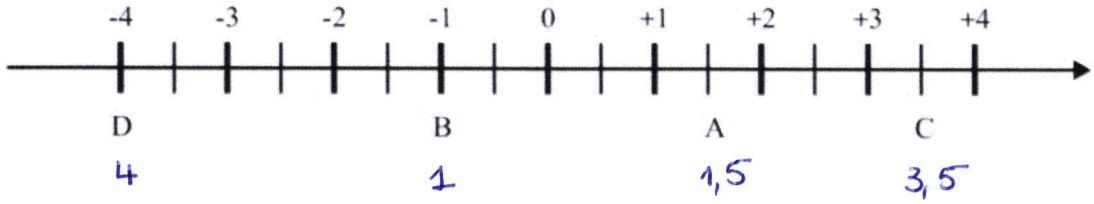
Deux nombres qui ont la **même distance à zéro** mais qui sont de **signes contraires** sont dits des opposés

Exemples :



-3 et 3 ont la même distance à zéro, ce sont des nombres opposés

Exemple : Donner la distance à zéro des nombres relatifs suivants.



D : 4 B : 1 A : 1,5 C : 3,5

II. Addition et soustraction de nombres relatifs

Règle de calcul sans parenthèses des deux nombres relatifs :

- Pour deux nombres relatifs de **même signe** :
  - on **garde le signe** commun ;
  - on **additionne leurs distances à zéro.**
- Pour deux nombres relatifs de **signe contraire** :
  - on **conserve le signe** de celui qui a la **plus grande distance à zéro** ;
  - on **soustrait** la plus petite distance à zéro de la plus grande.

Nombres de même signe

A = + 2 + 4 = + 6

B = - 2 - 3 = - 5

Nombres de signes différents

C = - 5 + 7 = + (7 - 5) = + 2

D = + 6 - 9 = - (9 - 6) = - 3

Règle de calcul sans parenthèses d'une expression :

Lorsqu'on calcule une expression, on additionne les **nombres positifs entre eux** et on additionne les **nombres négatifs entre eux** pour obtenir un calcul de deux nombres relatifs.

Exemples : $E = -4+3+7-13+8-5 = (3+7+8) - (4+5) = 18 - 9 = 9$

Simplification d'écriture : La règle des signes

En mathématiques, il est **interdit** de laisser deux signes côte à côte sans mettre des parenthèses.

Cependant, on peut simplifier l'écriture en **supprimant les parenthèses** :

$2+(+3)$ *devient* $2+3$ $\quad +(+ \longrightarrow +$

$4+(-5)$ *devient* $4-5$ $\quad +(- \longrightarrow -$

$6-(+7)$ *devient* $6-7$ $\quad -(+ \longrightarrow -$

$8-(-9)$ *devient* $8+9$ $\quad -(- \longrightarrow +$

Exemples : G = 15 - (+14) = 15 - 14 = 1

H = (+4) + (-11) = 4 - 11 = - 7

Méthode de calcul des sommes algébriques :

- On commence par **simplifier l'écriture** en se débarrassant des parenthèses de signes.
- **On regroupe** les nombres positifs puis les nombres négatifs
- On ajoute les nombres **positifs entre eux** et les nombres **négatifs entre eux.**
- On calcule la **dernière soustraction.**

➔ **Il faut commencer par effectuer les calculs entre parenthèses s'il y en a !**

Exemples :

I = +13 + (-5) - (-8) = 13 - 5 + 8 = (13 + 8) - 5 = 21 - 5 = 16

J = -15 - (+14) + (-15) - (-20) = -15 - 14 - 15 + 20 = 20 - (15 + 14 + 15) = 20 - 44 = -24

K = +4 + (-11) - (+3) = 4 - 11 - 3 = 4 - (11 + 3) = 4 - 14 = -10

III. Multiplication et division de nombres relatifs

A) La multiplication

Règle des signes :

- La multiplication de deux nombres relatifs de **même signe** donne un résultat positif.
- La multiplication de deux nombres relatifs de **signe contraire** donne un résultat négatif

Signe du 1er nombre	+	+	-	-
Signe du 2ème nombre	+	-	+	-
Signe du produit	+	-	-	+

Règle de calcul d'un produit de deux nombres relatifs :

Pour calculer le produit de deux nombres relatifs :

1) on détermine **son signe** avec la règle des signes ;

2) on **multiplie les distances à zéro** des deux nombres.

Exemples :

A = -4 x (-2,5) = + 4 x 2,5 = + 10

B = 0,2 x (- 14) = - 0,2 x 14 = - 2,8

Règle de calcul pour plusieurs nombres relatifs :

- On compte le nombre de facteurs négatifs :
  - Si le nombre de facteurs négatifs est **pair**, alors le produit sera positif.
  - Si le nombre de facteurs négatifs est **impair**, alors le produit sera négatif.
- On procède par étapes successives en prenant à chaque fois les nombres deux à deux.

Exemples :

C = 4 x (-3) x 3

C = - 12 x 3

C = - 36

D = -2 x (-5) x (-3)

D = - 10 x 3

D = - 30

E = -7 x 4 x (-2)

E = + 7 x 8

E = 56

Cas particuliers :

- Un produit de deux facteurs est **nul**, si et seulement si, l'un des facteurs au moins est **nul.**
- Multiplier un nombre **par -1** revient à prendre **l'opposé.**

Exemples :

- 6 x (-3) x 0 x 10 x (12) = 0
- (-1) x (-10) = + 10

B) La division

Règle de signes :

- La division de deux nombres relatifs de **même signe** donne un résultat **positif.**
- La division de deux nombres relatifs de **signe contraire** donne un résultat **négatif.**

Règle de calcul d'un quotient de deux nombres relatifs :

Pour calculer le quotient de deux nombres relatifs :

1) on détermine **son signe** avec la règle des signes ;
2) on divise **les distances à zéro** des deux nombres.

Exemples :

$F = \frac{-30}{-4} = +7,5$

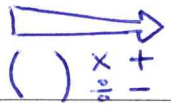
$H = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3} \approx -0,33\ldots$

G = 65 ÷ (-5) = - 13

I = 76 ÷ 4 = + 19

Rappel sur l'ordre des opérations :

Dans une expression numérique avec plusieurs opérations, on effectue **d'abord celles entre parenthèses**, puis **les multiplications et divisions**, enfin **les additions et les soustractions.**



Exemples :

J = (- 3) – 2 x (-4)

J = - 3 + 8

J = 8 - 3

J = 5

K = (-6) ÷ 2 +10

K = - 3 +10

K = 10 - 3

K = 7

L = (-3 + (-8)÷ 4) x 7

L = (-3 - 8 ÷ 4) × 7

L = (-3 - 2) × 7

L = (-5) × 7

L = - 35

M = 4 x (-3) ÷6 + (-5)

M = -12 ÷ 6 - 5

M = - 2 - 5

M = - 7

$P = \frac{5+(-4)}{3}$

$P = \frac{5-4}{3}$

$P = \frac{1}{3}$

$Q = \frac{-150}{2-27}$

$Q = \frac{-150}{-25}$

Q = + 6